Chapitre 28

Applications linéaires (partie B)

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E est un $\mathbb{K}$-e.v. et F, G sont des s.e.v. de E

1 Endomorphismes remarquables

1.1 Homothéties

Définition 28.1

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{id}_E$ est un endomorphisme de E appelé homothétie de rapport λ.
Si $\lambda \neq 0$, on a $\lambda \mathrm{id}_E \in GL(E)$ et dans ce cas $(\lambda \mathrm{id}_E)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{id}_E$.

1.2 Projecteurs

Définition 28.2 (Projecteur)

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E. Alors, on sait que pour tout élément $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On définit alors

$$\begin{aligned} p : E &\to E \\ x &\mapsto x_F \qquad (\text{avec } x = x_F + x_G) \end{aligned}$$

L'application p est appelée le projecteur sur F parallèlement à G.

Les s.e.v. F et G sont appelés les éléments caractéristiques du projecteur p.

Dans la suite, on notera $p_{F//G}$ le projecteur sur F parallèlement à G (notation semi-officielle).

Remarque. Soit $p = p_{F//G}$.

- Pour tout $x \in F$, on a $p(x) = x$. Autrement dit $p|_F = \mathrm{id}_F$.
- Pour tout $x \in G$, on a $p(x) = 0_E$. Autrement dit $p|_G = 0_{\mathcal{L}(G)}$.

Exemple 1. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$, l'application

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \mathrm{Re} z \end{aligned}$$

est un projecteur sur le s.e.v. $\mathbb{R}$ parallèlement au s.e.v. $i\mathbb{R}$.

Exemple 2. Déterminer le projecteur sur $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\right\}$ parallèlement à $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\}$.

Exemple 3. L'application

$$\begin{aligned} p : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\mapsto \frac{1}{2}(A + A^\top) \end{aligned}$$

est un projecteur sur l'ensemble des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'ensemble des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 28.3

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E et $p = p_{F//G}$ le projecteur sur F parallèlement à G. Alors :

- p est linéaire, i.e. $p \in \mathcal{L}(E)$.
- $F = \mathrm{Im}\, p = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{id}_E)$
- $G = \mathrm{Ker}\, p$

Corollaire 28.4

Tout projecteur p est un projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.
En particulier, $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Remarque. Attention, si $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$, cela ne suffit pas à conclure que u est un projecteur. Par exemple, si p est un projecteur et que $u = 2p$, on a $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} p$, donc on a bien

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$$

mais u n'est pas un projecteur : en utilisant la Proposition ci-après, on a $u \circ u = (2p) \circ (2p) = 4(p \circ p) = 4\mathrm{id}_E$ donc u n'est pas un projecteur.

Propriété 28.5

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Démonstration. **Sens direct** : on suppose que p est un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. supplémentaire G. Montrons que $p \circ p = p$. Soit $x \in E$: on note $(x_F, x_G) \in F \times G$ tels que $x = x_F + x_G$. Alors

$$(p \circ p)(x) = p(p(x)) = p(x_F)$$

Or,

$$x_F = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$$

est la décomposition de x_F selon les s.e.v. supplémentaires F, G. Ainsi,

$$(p \circ p)(x) = p(x_F) = x_F = p(x)$$

D'où $p \circ p = p$ par arbitraire sur x.

Sens réciproque : on suppose que $p \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $p \circ p = p$. Montrons que $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires puis que p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

1.

2.

3. Montrons que p est un projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$. Soit $x \in E$. Par ce qui précède, on peut décomposer x en :
$$x = \underbrace{x_K}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{x_I}_{\in \operatorname{Im} p}$$
Il suffit alors de montrer que $p(x) = x_I$. Or, on a vu que
$$x = \underbrace{x - p(x)}_{\in \operatorname{Ker} p} + \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p}$$
Par unicité de la décomposition, on a en particulier que $p(x) = x_I$. D'où p est bien le projecteur annoncé.

□

1.3 Symétries

Définition 28.6 (Symétrie)

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E. Alors, on sait que pour tout élément $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On définit alors

$$\begin{aligned} s : E &\to E \\ x = x_F + x_G &\mapsto x_F - x_G \end{aligned}$$

L'application s est appelée symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Les s.e.v. F et G sont appelés les éléments caractéristiques de la symétrie s.

Dans la suite, on notera $s_{F//G}$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G (notation semi-officielle).

Remarque. Soit $s = s_{F//G}$.

- Pour tout $x \in F$, on a $s(x) = x$. Autrement dit $s|_F = \mathrm{id}_F$.
- Pour tout $x \in G$, on a $s(x) = -x$. Autrement dit $s|_G = -\mathrm{id}_G$.

Exemple 4. Dans le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}$, l'application

$$\begin{aligned} s : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{z} \end{aligned}$$

est une symétrie par rapport à $\mathbb{R}$ parallèlement à $i\mathbb{R}$.

Exemple 5. L'application $u = -\mathrm{id}_E$ est une symétrie car .... C'est la symétrie par rapport à .... parallèlement à ....

Propriété 28.7

Soit F, G deux s.e.v. supplémentaires de E et $s = s_{F//G}$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Alors :

- s est linéaire, i.e. $s \in \mathcal{L}(E)$.
- $F = \{x \in E \mid s(x) = x\} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$
- $G = \{x \in E \mid s(x) = -x\} = \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$

Corollaire 28.8

Toute symétrie s est une symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$.
En particulier, $E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{id}_E)$.

Propriété 28.9

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Corollaire 28.10

Toute symétrie s est un automorphisme, et de plus $s^{-1} = s$.

Exemple 6. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} s : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

est une symétrie et déterminer ses éléments caractéristiques.

2 Formes linéaires et hyperplans

2.1 Formes linéaires

Dimension quelconque

Définition 28.11 (Forme linéaire)

On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des formes linéaires sur E est souvent noté $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Il est appelé espace dual de E.

Exemple 7. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^2 &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto 2x + 3y \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^2$, i.e. un élément de $(\mathbb{K}^2)^*$.

Exemple 8. L'application $P \mapsto P(\alpha)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

Remarque. Si $\varphi \in E^*$, alors ou bien $\varphi = 0$, ou bien φ est surjective (donc $\operatorname{rg} \varphi = 1$).
En effet, $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{K}$ et donc $\operatorname{rg} \varphi = \dim(\operatorname{Im} \varphi) \in \{0, 1\}$. Si $\operatorname{rg} \varphi = 0$, alors $\varphi = 0$. Si $\operatorname{rg} \varphi = 1$, alors par un argument de dimension on a $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{K}$, donc φ est surjective.

Dimension finie

Propriété 28.12

Si E est de dimension finie, alors E^* aussi et on a $\dim E^* = \dim E$.

Démonstration. Cela vient du fait que $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E$. □

Définition 28.13

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $e_i^* : E \to \mathbb{K}$ l'unique forme linéaire telle que

$$e_i^*(e_i) = 1 \qquad \text{et pour tout } j \neq i \qquad e_i^*(e_j) = 0$$

La forme linéaire $e_i^* \in E^*$ est appelée <u>forme coordonée d'indice i selon la base $(e_i)_{1<i<n}$</u>.

Autrement dit, pour tous indices $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$.

La donnée de $e_i^*(e_j)$ est suffisant pour déterminer entièrement l'application linéaire e_i^* d'après le théorème 27.13.

Remarque. Si $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ est un vecteur de E, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$e_i^*(x) = e_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \delta_{i,j} = \lambda_i$$

Autrement dit, $e_i^*(x)$ est égal à la i-ième coordonnée de x selon la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

Propriété 28.14

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de E^*, appelée <u>base duale</u> de $(e_1, \cdots, e_n)$.

Démonstration. Montrons que $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une famille libre. Soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0$. Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, si on évalue en e_j, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_j) = 0 \\ \Longrightarrow & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{i,j} = 0 \\ \Longrightarrow & \alpha_j = 0 \end{aligned}$$

Par arbitraire sur j, on en déduit que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Ainsi la famille $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est libre. Or, $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ possède n éléments et $\dim E^* = \dim E = n$. Donc, $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de E^*. □

En particulier, étant toute forme linéaire $\varphi \in E^*$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des e_i^* : il existe un (unique) n-uplet $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$$

Attention : la base duale $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ dépend du choix de la base $(e_1, \cdots, e_n)$. Chaque base sur E est associée à une (unique) base duale de E^*.

2.2 Hyperplans vectoriels

Dimension quelconque

Définition 28.15 (Hyperplan)

On appelle hyperplan (vectoriel) de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle.

Propriété 28.16 (Hors programme)

Soit φ, ψ deux formes linéaires non nulles. Soit $H_1 = \operatorname{Ker} \varphi$ et $H_2 = \operatorname{Ker} \psi$ deux hyperplans de E. Alors $H_1 = H_2$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda \varphi$.

Propriété 28.17 (Caractérisation des hyperplans)

Soit H un s.e.v. de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E
2. Il existe une droite vectorielle D, non contenue dans H, telle que $E = D \oplus H$.

Remarque. Si $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan, pour trouver la droite D, il suffit de prendre $D = \operatorname{Vect}(x)$, où $x \in E$ peut être tout vecteur tel que $\varphi(x) \neq 0$.

Exemple 9. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un hyperplan de E et déterminer une droite vectorielle supplémentaire.

Remarque. Dans l'exemple ci-dessus, on aurait pu prendre $D = \operatorname{Vect}(Q)$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$.

Dimension finie

Propriété 28.18

On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim H = n-1$.

Démonstration. Sens direct : si $H = \operatorname{Ker}\varphi$ avec $\varphi \in E^*$ non nulle, alors par le théorème du rang,

$$\begin{aligned}\dim E &= \dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \operatorname{rg}\varphi \\ &= \dim H + 1\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Définition 28.19 (Équations d'un hyperplan)

On suppose E de dimension finie. Soit H un hyperplan de E.
On appelle <u>équation de H</u> toute équation de la forme $\varphi(x) = 0$, d'inconnue $x \in E$, et où $\varphi \in E^*$ est telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$.

Remarque. Autrement dit, $x \in H$ si et seulement si x est solution de l'équation de H.

Propriété 28.20

Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et qu'on écrit $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, l'équation d'un hyperplan est de la forme

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

avec $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Démonstration. En effet, soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi(x) = 0 &\iff \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = 0 \\ &\iff x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = 0 \\ &\iff a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\end{aligned}$$

en posant $a_i := \varphi(e_i) \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. De plus, $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ car, si tous les a_i étaient nuls, on aurait $\varphi(e_1) = \ldots = \varphi(e_n) = 0$, ce qui entrainerait que φ est nulle. □

Remarque. Ainsi, H est un hyperplan si et seulement s'il existe $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$H = \{x \in E \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$$

où $x_1, \cdots, x_n$ désignent les coordonnées de x dans une base donnée de E.

Exemple 10. Montrer que $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\right\}$ est un e.v. et déterminer sa dimension.

Remarque. L'équation d'un hyperplan dépend techniquement de la base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E choisie. Mais sur $\mathbb{K}^n$, on prend systématiquement la base canonique usuelle.

Propriété 28.21

On suppose E de dimension finie $n \geq 1$. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $(b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.
Les hyperplans d'équations respectives (en considérant la même base de E)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0$$

sont confondus si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad (b_1, \cdots, b_n) = \lambda (a_1, \cdots, a_n)$.

Démonstration. C'est une conséquence de la Proposition 28.16. □

Propriété 28.22

On suppose E de dimension finie $n \geq 2$. Soit H_1, H_2 deux hyperplans de E. Alors

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \begin{cases} n-1 & \text{si } H_1 = H_2 \\ n-2 & \text{si } H_1 \neq H_2 \end{cases}$$

Si $m \in \mathbb{N}^*$ et $H_1, \cdots, H_m$ sont des hyperplans de E, alors

$$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{m} H_k\right) \geq n - m$$

Il n'y a pas toujours égalité, il se peut que l'intersection de m hyperplans (même distincts) n'abaisse pas de m le degré :

Exemple 11. Déterminer la dimension du s.e.v. $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 5y - 7z = 0 \end{cases} \right\}$

F s'écrit comme l'intersection de 3 hyperplans dans $\mathbb{R}^3$, mais on va montrer pourtant que $\dim F = 1$.

Remarque. On pouvait aussi raisonner ainsi : dans l'exemple ci-dessus, F peut en fait se réécrire ainsi :

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+y-z=0 \\ -3y+4z=0 \end{cases} \right\}$$

et donc comme l'intersection de deux hyperplans distincts, donc de dimension $\dim \mathbb{R}^3 - 2 = 1$.

Propriété 28.23

On suppose E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un s.e.v. de E de dimension $n-m$ (avec $m \leq n$). Alors il existe m hyperplans $H_1, \cdots, H_m$ de E tels que

$$F = \bigcap_{k=1}^{m} H_k$$